Anahí Dello Russo

INFORME CIENTÍFICO-TECNOLÓGICO

PERIODO agosto 2016 - agosto2017

Índice

1. APELLIDO: *Dello Russo*
Nombre: *Anahí*
Títulos: *Licenciada en Física UNLP – Doctora de la Facultad de Ciencias Exactas UNLP*
Dirección Electrónica:

2. OTROS DATOS
INGRESO: Categoría *Asistente* Mes *Octubre* Año *1989*
ACTUAL: Categoría *Principal* Mes *Agosto* Año *1999*

3. PROYECTOS DE INVESTIGACION EN LOS CUALES COLABORA
a) Título: *Análisis Matemático y Aplicaciones*
Director: *Maltz, Alberto*
Código: *UNLP 11/X752*
Período: *enero 2016- diciembre 2017*
b) Título: *Resolución numérica de ecuaciones diferenciales y temas de análisis relacionados*
Director: *Durán, Ricardo Guillermo*
Código: *PICT-2014-1771*
Período: *junio 2014 - junio 2017*

4. DIRECTOR
Apellido y Nombres: *Durán, Ricardo Guillermo*
Cargo Institución: *Profesor Titular del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA --- Investigador Superior del CONICET*
Dirección: Ciudad:
C. P.: Prov. *B* Tel.
Dirección Electrónicar

5. LUGAR DE TRABAJO

Institución: *Departamento de Matemática*

Dependencia: *Facultad de Ciencias Exactas, UNLP*

Dirección: *calle 50 s/n (entre calles 1 y 115)*

Ciudad: *La Plata* C. P.: *1900* Prov.: *Buenos Aires* Tel. *0221-422-9850*

6. INSTITUCION DONDE DESARROLLA TAREAS DOCENTES U OTRAS

Nombre*: Departamento de Matemática*

Dependencia: *Facultad de Ciencias Exactas, UNLP*

Dirección: *calle 50 s/n (entre calles 1 y 115)*

Ciudad: *La Plata* C. P.: *1900* Prov.: *Buenos Aires* Tel.: *0221-422-9850*.

Cargo que ocupa: *Jefe de Trabajos Prácticos con Dedicación Exclusiva*

7. RESUMEN DE LA LABOR QUE DESARROLLA (Descripción para el repositorio institucional).

Analizamos las soluciones aproximadas (obtenidas usando métodos de elementos finitos no standard) de problemas espectrales importantes por sus numerosas aplicaciones en

- elasticidad lineal,
- acústica,
- vibraciones de estructuras delgadas,
- sistemas con interacción fluido-estructura,
- física del plasma,
- electromagnetismo.

Además de determinar el comportamiento asintótico del error (**estimaciones a priori**), buscamos definir indicadores locales del error que puedan construirse a partir de la solución numérica y de los datos del problema (**estimaciones a posteriori**). Estos indicadores del error pueden usarse tanto para evaluar la calidad de la aproximación como para mejorarla mediante técnicas de refinamiento adaptativo (el objetivo fundamental es **distribuir el error y el esfuerzo computacional para obtener una sucesión de grillas de cálculo de complejidad óptima**).

En particular, el conocimiento de los autovalores permite estudiar el comportamiento de los sistemas físicos en la vecindad de sus estados de equilibrio (**estabilidad**).

8. EXPOSICION SINTETICA DE LA LABOR DESARROLLADA EN EL PERÍODO

Durante este período laboral realicé las siguientes tareas:

1. Estimaciones *a posteriori* del error para el problema espectral de Reissner-Mindlin.

El cálculo aproximado de las frecuencias de oscilación de un cuerpo elástico es fundamental en ingeniería; en todo diseño se debe asegurar (a fin de evitar el fenómeno de resonancia) que las frecuencias de las cargas dinámicas sean inferiores a las frecuencias propias de la estructura sobre la que se aplican. Esto es particularmente importante en el caso de estructuras tri-dimensionales delgadas (placas y cáscaras) donde las frecuencias más pequeñas son proporcionales al espesor.

Debido a la gran complejidad del análisis espectral en tres dimensiones, es usual recurrir al principio de reducción dimensional y definir *modelos de placas* como el de Reissner-Mindlin [AAFM]. De los muchos métodos existentes para aproximar el problema espectral de Reissner-Mindlin, el método mixto propuesto por Durán-Liberman [DL] es libre de *locking* y produce aproximaciones de los pares autovalor/autovector que convergen con orden óptimo [DHLRS1].

En este período laboral, se desarrolló el análisis *a posteriori* del error para este problema; consta de varios pasos.

- Siguiendo los argumentos introducidos en [BFS], obtuvimos estimaciones del orden con el que convergen las aproximaciones
    1. del esfuerzo de corte $\boldsymbol{\gamma} = \lambda t^{-2}(\nabla\omega - \boldsymbol{\beta})$ en la norma $H^{-1}(\Omega)$,
    2. del término $t\,\mathrm{rot}\boldsymbol{\gamma}$ en la norma $L^2(\Omega)$,

  que son independientes de t (aquí Ω es el área transversal de la placa, t es el espesor, $(\omega, \boldsymbol{\beta})$ son las variables que describen la deformación de la estructura según el modelo de Reissner-Mindlin y λ es un coeficiente que depende del material elástico); es interesante destacar que estos resultados completan el análisis realizado en [DHLRS1].
- Definimos un estimador local del error (de tipo residual) $\eta_T^2 \coloneqq \eta_1^2 + \eta_2^2$, siendo
$$\eta_1^2 \coloneqq h_T^2 \|div\, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_h) + \boldsymbol{\gamma_h} + \mu_h\, t^2 \boldsymbol{\beta}_h\|_{0,T}^2 + \mu_h^2\, h_T^2 (h_T^2 + t^2)\|w_h\|_{0,T}^2 + \|\beta_h - R_h\beta_h\|_{H(rot,\Omega)}^2,$$
$$\eta_2^2 \coloneqq \frac{1}{2}\sum_{l\subset\partial T} h_l\, \|[\![\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\beta}_h)\cdot \boldsymbol{n}_l]\!]\|_{0,l}^2 + h_l(h_l^2 + t^2)\|[\![\boldsymbol{\gamma_h}\cdot \boldsymbol{n}_l]\!]\|_{0,l}^2\,,$$
  donde T es un elemento de la partición del dominio con diámetro $\sim h_T$; l es un lado del borde de T; $\boldsymbol{n_l}$ es el vector normal exterior al lado l, R_h es el proyector de Raviart-Thomas y μ_h es la frecuencia de vibración aproximada.
- Probamos que el estimador propuesto es *confiable*: brinda una cota superior global para la siguiente norma del error $\|\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_h\|_{1,\Omega} + \|\omega - \omega_h\|_{1,\Omega} + t\,\|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_{0,\Omega} + t^2\,\|rot(\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h)\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}_h\|_{-1,,\Omega}$, salvo términos de orden superior.
- Probamos que el estimador *es eficiente*: brinda una cota inferior local, salvo términos de orden superior, para el error medido en la misma norma.
- Destacamos que las estimaciones son *robustas* en el límite $t \to 0$; resultados similares solo se conocían, hasta ahora, para problemas estáticos o fuentes [LS, CH].

2. Estimaciones *a posteriori* del error para el problema de las vibraciones acústicas en dominios 3D.

Otro problema importante en ingeniería es la determinación de los modos de oscilación de un fluido contenido por un recipiente rígido. Entre los métodos existentes para aproximar las soluciones de este problema, el propuesto en [BR] y analizado en [BDMRS] converge con orden óptimo y no introduce soluciones espurias. Consiste en aproximar los desplazamientos en el fluido utilizando el espacio de Raviart-Thomas de orden cero. En [BHR], el método fue extendido a problemas en tres dimensiones. En cuanto al análisis *a posteriori* correspondiente a esta metodología, en [DGP] y [ADV] se introducen indicadores locales del error en la aproximación de los autovectores. Los resultados se obtuvieron suponiendo que el dominio ocupado por el fluido tenía *simetría axial*; como consecuencia, fue posible la modelización bidimensional del problema. Obviamente, este tipo de hipótesis reduce significativamente las aplicaciones prácticas de los resultados obtenidos.

En este período laboral, mostramos que es posible extender los argumentos en [ADV] para problemas definidos en dominios *convexos* sin simetrías particulares. Procediendo como en [ADV], pudimos definir el siguiente indicador local del error:

$$\eta_T^2 := \frac{\lambda_h^2}{c^4}\, h_T^2 \|\boldsymbol{u}_h\|_{0,T}^2 + \sum_{F\subset\partial T} h_F \|[\![\boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{n}_F]\!]\|_{0,F}^2,$$

donde $\boldsymbol{u}_h$ es la aproximación del campo de desplazamientos en el fluido, T un elemento de la partición del dominio con diámetro $\sim h_T$; F es una cara del borde de T, $\boldsymbol{n}_F$ es el vector normal exterior a la cara F y λ_h es la frecuencia de vibración aproximada. Como en el caso bidimensional, el estimador propuesto es asintóticamente equivalente a la norma $H(div,\Omega)$ del error, salvo términos de orden superior.

Posteriormente, para eliminar la hipótesis de convexidad, adoptamos la técnica utilizada para el análisis *a posteriori* del error en la aproximación de los modos de vibración de una estructura elástica obtenidos con el método mixto de Arnold-Winther (ver Informe CIC 2014). Definimos estimaciones que acotan superiormente a la norma $H(div,\Omega)$ del error.

Seguiremos trabajando en este problema.

3. Estimaciones *a posteriori* del error para el problema de las vibraciones acopladas placa-fluido.

Se consideró también el problema de aproximar los modos de vibración de una placa elástica en contacto con un fluido compresible. Siguiendo los argumentos en [DHLRS2],

- el comportamiento de la placa se modeló mediante las ecuaciones de Reissner-Mindlin y, el del fluido, usando la formulación en base a los desplazamientos,
- las ecuaciones de Reissner-Mindlin y los desplazamientos en el fluido se aproximaron mediante el método de Durán-Liberman y el espacio de Raviart-Thomas de orden cero, respectivamente,
- ambas aproximaciones se acoplan débilmente sobre la interfaz.

El método así definido resulta no conforme. En [DHLRS2] se prueba que es libre de modos espurios y se establecen estimaciones *a priori* del error en la aproximación de los autovalores y los autovectores que son óptimas y válidas uniformemente con respecto a t.

Basándonos en los resultados obtenidos en los incisos anteriores, nos proponemos definir un indicador local del error para la aproximación de los modos de vibración del sistema acoplado.

Como primer paso, definimos una versión *híbrida* del problema espectral introduciendo una nueva variable: la presión en la interfaz fluido-placa; esto permite imponer la condición cinemática de acoplamiento de una manera más simple. Mostramos, además, que esta versión establece un problema bien definido (satisface las condiciones de Brezzi [BF]) y equivalente al problema original.

Seguiremos trabajando en este problema.

4. Extensiones de la teoría de aproximación espectral.

En los últimos años, hemos podido extender la teoría de Decloux-Nassif-Rappaz [DNR1, DNR2] para analizar las aproximaciones *no standard* del espectro de un operador lineal y acotado definido sobre un espacio de Hilbert (ver Informes CIC 2012-2013, 2013-2014, 2014-2015). Específicamente, hemos propuesto un marco teórico abstracto que permite analizar las aproximaciones espectrales de problemas *asociados a operadores no necesariamente compactos, definidos en dominios no necesariamente poligonales, discretizados por métodos no necesariamente conformes.* En todos los trabajos, se asumió que las formas bilineales continua y discreta pueden diferir, pero están obligadas a ser iguales cuando, restringidas a la intersección de los dominios continuo y discreto, se las testea con funciones del espacio continuo.

Sin embargo, existen varias aplicaciones interesantes donde este requisito no puede satisfacerse. Por ejemplo, es bien sabido que alguna clase de integración reducida o interpolación mixta debe ser incluida en el método numérico si se quiere evitar el fenómeno de *locking* al aproximar las ecuaciones de Reissner-Mindlin [AF, DL, FT].

Otro ejemplo son los métodos VEM (*Virtual Element Method*). Estos métodos fueron introducidos en [BBCMMR] como una generalización de los métodos de elementos finitos conformes. También pueden ser considerados como un análogo variacional de los métodos MFD (*Mimetic Finite Diference)* [BBL, LMS]. Los métodos VEM son muy flexibles ya que permiten definir particiones del dominio de cálculo utilizando elementos poligonales arbitrarios. Se caracterizan, además, por evitar la evaluación explícita de las funciones base sobre estos elementos poligonales (pueden ser muy complejas); de hecho, de todo el espacio de elementos finitos local, sólo se requiere del conocimiento de un sub-espacio polinomial para brindar un método numérico estable y de probada exactitud. Esto se logra separando, en el espacio base local, a los polinomios de las restantes funciones no polinomiales de la base (*subespacio virtual*) por medio de operadores de proyección que se construyen usando los grados de libertad del método. Durante la última década, los métodos VEM se han aplicado con éxito a muchos y muy variados problemas (ver, por ejemplo, [CMS, ALM, BFM]). Su aplicación a la determinación del espectro de operadores acotados es muy reciente y, por ahora, limitada al caso conforme [MRR, BMRR, GV].

Durante este período laboral, comenzamos a estudiar la posibilidad de generalizar la teoría ya obtenida de manera tal que pueda aplicarse a métodos como los aquí mencionados.

5. Referencias:

[ADV] A. Alonso, A. Dello Russo, V. Vampa, A posteriori error estimates in finite element acoustic analysis, J. Comput. Appl. Math., 117 (2000) 105-119.

[AAFM] S.M. Alessandrini, D.N. Arnold, R.S. Falk, A.L. Madureira, Derivation and Justification of Plate Models by Variational Methods, Centre de Recherches Mathematiques, CRM Proceedings and Lecture Notes, 1999.

[AF] D.N. Arnold, R.S. Falk, A uniformly accurate finite element method for the Reissner-Mindlin plate, SIAM J. Numer. Anal., 26 (1989) 1276-1290.

[ALM] B. Ayuso de Dios, K. Lipnikov and G. Manzini, The nonconforming virtual element method, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 50(3) (2016), pp. 879–904.

[BBCMMR] L. Beirão da Veiga, F. Brezzi, A. Cangiani, G. Manzini, L.D. Marini, A. Russo, Basic principles of virtual element methods, Math. Models Methods Appl. Sci., 23 (2013), pp. 199–214.

[BMRR] L. Beirão da Veiga, D. Mora, G. Rivera, R, Rodríguez, A virtual element method for the acoustic vibration problem, CI2MA preprint 2015-44 - http://www.ci2ma.udec.cl.

[BDMRS] A. Bermúdez, R. Durán, M. A. Muschietti, R. Rodríguez, J. Solomin, Finite element vibration analysis of fluid-solid systems without spurious modes, SIAM J. Numer. Anal., 32 (1995) 1280-1295.

[BHR] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, R. Rodríguez, Finite element computation of three dimensional elastoacoustic vibrations. J. Sound & Vibration, **219** (1999) 277–304.

[BR] A. Bermúdez, R. Rodríguez, Finite element computation of the vibration modes of a fluid-solid system, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 119 (1994) 355-370.

[BFS] F. Brezzi, M. Fortin, R. Stenberg, Error analysis of mixed-interpolated elements for Mindlin-Reissner plates, Math. Models Methods Appl. Sci, 1 (1991) 125–151.

[BF] F. Brezzi and M. Fortin, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York, 1991.

[BBL] F. Brezzi, A. Buffa, K. Lipnikov, Mimetic finite differences for elliptic problems, Math. Model. Numer. Anal., 43 (2009) 277-295.

[BFM] F. Brezzi, R. S. Falk, L. D. Marini, Basic principles of mixed virtual element methods, ESAIM Math. Model. Numer. Anal., 48 (2014), pp. 1227–1240.

[CMS] A. Cangiani, G. Manzini, O.J. Sutton, Conforming and nonconforming virtual element methods for elliptic problems, arXiv preprint arXiv:1507.03543, 2015.

[CH] C. Carstensen, J. Hu, A posteriori error analysis for conforming MITC elements for Reissner-Mindlin plates, Math. Comp., 77 (2008) 611–632.

[DNR1] J. Decloux, N. Nassif, J. Rappaz, On spectral approximation. Part I. The problem of convergence, R.A.I.R.O., Anal. Numer., 12 (1978) 97-112.

[DNR2] J. Descloux, N. Rassif, J. Rappaz, On spectral approximation. Part II. Error estimates for the Galerkin Methods, R.A.I.R.O., Anal. Numer., 12 (1978) 113-120.

[DGP] R. Durán, L. Gastaldi, C. Padra, A posteriori error estimators for mixed approximations of eigenvalue problems Math. Models Methods Appl. Sci., 9 (1999) 1165-1178.

[DHLRS1] R. Durán, L. Hervella-Nieto, E. Liberman, R. Rodríguez, J. Solomin, Approximation of the vibration modes of a plate by Reissner-Mindlin equations, Math. Comp., 68 (1999) 1447-1463.

[DHLRS2] R. Durán, L. Hervella-Nieto, E. Liberman, R. Rodríguez, J. Solomin, Finite element analysis of the vibration problem of a plate coupled with a fluid, Numer. Math., 86 (2000) 591-616.

[DL] R. Durán, E. Liberman, On mixed finite element methods for the Reissner-Mindlin plate model, Math. Comp., 58 (1992) 561–573.

[FT] R.S. Falk, T. Tu, Locking-free finite elements for the Reissner-Mindlin plate, Math. Comp., 69 (2000) 911–928.

[GV] F. Gardini, G.Vacca, Virtual Element Method for Second Order Elliptic Eigenvalue Problems, arXiv preprint arXiv: 1610.03675v3, 2017.

[LMS] K. Lipnikov, G. Manzini, M. Shashkov, Mimetic finite difference method. J. Comput. Phys., 257 Part B (2014) 1163-1227.

[LS] C. Lovadina, R. Stenberg, A posteriori error analysis of the linked interpolation technique for plate bending problems, SIAM J. Numer. Anal., 43 (2005), 2227-2249.

[MRR] D. Mora, G. Rivera, R. Rodríguez, A virtual element method for the Steklov eigenvalue problem, Math. Models Methods Appl. Sci., 25 (8) (2015) 1421–1445

9. OTRAS ACTIVIDADES

9.1 PUBLICACIONES, COMUNICACIONES, ETC. Debe hacerse referencia, exclusivamente, a aquellas publicaciones en las cuales se ha hecho explícita mención de la calidad de personal de apoyo de la CIC. Toda publicación donde no figure dicha aclaración no debe ser adjuntada. Indicar el nombre de los autores de cada trabajo en el mismo orden en que aparecen en la publicación, informe o memoria técnica, año y, si corresponde, volumen y página, asignándole a cada uno un número.

9.2 CURSOS DE PERFECCIONAMIENTO, VIAJES DE ESTUDIO, ETC. Indicar la denominación del curso, carga horaria, institución que lo dictó y fecha, o motivos del viaje, fecha, duración, instituciones visitadas y actividades realizadas.

9.3 ASISTENCIA A REUNIONES CIENTIFICAS/TECNOLOGICAS o EVENTOS SIMILARES. Indicar la denominación del evento, lugar y fecha de realización, tipo de participación que le cupo y título(s) del(los) trabajo(s) o comunicación(es) presentada(s).

10. TAREAS DOCENTES DESARROLLADAS EN EL PERIODO.

Jefe de Trabajos Prácticos de Análisis Matemático I-CIBEX, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, segundo cuatrimestre de 2016.

Jefe de Trabajos Prácticos de Análisis Matemático I-CIBEX, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP, primer cuatrimestre de 2017.

11. OTROS ELEMENTOS DE JUICIO NO CONTEMPLADOS EN LOS TITULOS ANTERIORES. (En este punto se indicará todo lo que se considere de interés para una mejor evaluación de la tarea cumplida en el período).

- Los resultados obtenidos durante años 2007-2015, me permitieron redactar, con la dirección del Dr. Durán, el siguiente trabajo: *Estimaciones a priori y a posteriori del error para problemas de autovalores* (http://hdl.handle.net/10915/60297).

  Este trabajo fue propuesto como trabajo de tesis para optar al título de Doctor de la Facultad de Ciencias Exactas – Área Matemática – UNLP.

  El trabajo de tesis fue defendido y aprobado el 23 de mayo de 2017.

  Adjunto al presente informe, se presenta el certificado correspondiente.

- Integrante de la Comisión de Enseñanza del Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, UNLP

Lic. Anahí Dello Russo

Dr. Ricardo G. Durán